Apostol Möbius 関数の和について

九州大学大学院マス・フォア・イノベーション連係学府
寺田怜央 (Reo TERADA) *

概要

1970 年, T. M. Apostol [1] は Möbius 関数の一般化として Apostol Möbius 関数 μ_k ($k \in \mathbb{N}$) を導入し，漸近公式 $\sum_{n \le x} \mu_k(n) = A_k x + O(x^{1/k} \log x)$ を与えた．1977 年, D. Suryanarayana [6] は Riemann 予想下で誤差評価が $O(x^{4k/(4k^2+1)} \exp(A \log x (\log\log x)^{-1}))$ になることを示した．ここで A はある正の絶対定数である．A. Bege [4] は 2001 年に誤差項の評価に関して 2 つの予想を立てた．D. Banerjee, Y. Fujisawa, T. M. Minamide, Y. Tanigawa [3] は 1 つ目の Bege 予想を部分的に解決した．もう一方の予想を部分的に解くことができたため, 本発表ではこれを紹介する．また, 誤差項の 2 乗平均についても紹介する．

1　導入

$\mathbb{N}$ を正の整数全体の集合, $\mathbb{C}$ を複素数全体の集合とする．

定義 1.1. 定義域が $\mathbb{N}$ で終域が $\mathbb{C}$ であるような関数を**数論的関数**という．

例 1.2. 次で定義される数論的関数 μ を **Möbius 関数**という:

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & n = 1 \text{ のとき}, \\ (-1)^r & n \text{ が相異なる } r \text{ 個の素数の積であるとき}, \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

定義 1.3. 2 つの数論的関数 f, g に対して, 数論的関数 $f * g$ を

$$(f * g)(n) := \sum_{dq=n} f(d) g(q), \quad n \in \mathbb{N}$$

と定め, f と g の **Dirichlet 畳み込み積**という．

例 1.4. 正の整数 n に対して $\varphi(n)$ を n 以下の正の整数であって n と互いに素なものの個数とするとき $\varphi = \mathrm{id} * \mu$ である．但し

$$\mathrm{id}(n) = n, \quad n \in \mathbb{N}$$

とする．

* E-mail: terada.reo.872@s.kyushu-u.ac.jp

例 1.5. 正の整数 n に対して $\theta(n)$ を n の平方因子を持たない正の約数の個数とするとき $\theta = |\mu| * \mathbf{1}$ である．但し

$$|\mu|(n) \coloneqq |\mu(n)|, \quad \mathbf{1}(n) \coloneqq 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

とする．

2 先行研究

T. M. Apostol [1] は 1970 年に Möbius 関数の一般化として次の数論的関数を定義した．

定義 2.1. 次で定義される数論的関数 μ_k $(k \in \mathbb{N})$ を **Apostol Möbius 関数**という:

$$\mu_k(n) \coloneqq \begin{cases} 1 & n = 1 \text{ のとき}, \\ 0 & \text{ある素数 } p \text{ に対して } p^{k+1} \mid n \text{ となるとき}, \\ (-1)^r & n = (p_1 p_2 \cdots p_r)^k \prod_{i>k} p_i^{a_i} \ (0 \leq a_i < k) \text{ とかけるとき}, \\ 1 & \text{その他}. \end{cases}$$

$k = 1$ のとき, Apostol Möbius 関数 μ_k は通常の Möbius 関数と一致する．すなわち, $\mu_1 = \mu$ が成り立つ．

さらに, T. M. Apostol [1] は Apostol Möbius 関数の部分和に対して次の漸近公式を得た:

定理 2.2. 実数 $x \geq 2$ と整数 $k \geq 2$ に対して

$$\sum_{n \leq x} \mu_k(n) = A_k x + O\Big(x^{1/k} \log x\Big)$$

が成り立つ．ここで

$$A_k \coloneqq \prod_{p:\text{素数}} \left(1 - \frac{2}{p^k} + \frac{1}{p^{k+1}}\right)$$

である．

D. Suryanarayana [6] は 1977 年に Riemann 予想の仮定の下で次を示した:

定理 2.3. ある絶対定数 $A > 0$ が存在して, 実数 $x \geq 3$ と整数 $k \geq 2$ に対して

$$\sum_{n \leq x} \mu_k(n) = A_k x + O\Big(x^{4k/(4k^2+1)} \omega(x)\Big), \quad \omega(x) \coloneqq \exp\left(A \frac{\log x}{\log \log x}\right)$$

が成り立つ．

A. Bege [4] は 2001 年に次を予想した:

予想 2.4. (1) ある絶対定数 $D > 0$ が存在して, 実数 $x \geq 3$ と整数 $k \geq 2, n \geq 1$ に対して

$$\sum_{\substack{r \leq x \\ (r,n)=1}} \mu_k(r) = A_{k,n}x + E_{k,n}(x),$$
$$E_{k,n}(x) = O\Big(\theta(n)x^{1/k}\delta(x)\Big),$$
$$\delta(x) \coloneqq \exp\left(-D\frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\right)$$

が成り立つ. ここで

$$A_{k,n} \coloneqq \frac{\varphi(n)}{n} \prod_{\substack{p:\text{素数} \\ p \nmid n}} \left(1 - \frac{2}{p^k} + \frac{1}{p^{k+1}}\right)$$

である. 特に, $n = 1$ のとき

$$\sum_{r \leq x} \mu_k(r) = A_k x + O\Big(x^{1/k}\delta(x)\Big)$$

が成り立つ.

(2) Riemann 予想を仮定する. このとき, 実数 $x \geq 3$ と整数 $k \geq 2, n \geq 1$ に対して

$$E_{k,n}(x) = O\Big(\theta(n)x^{2/(2k+1)}\omega(x)\Big)$$

が成り立つ. 特に, $n = 1$ のとき

$$\sum_{r \leq x} \mu_k(r) = A_k x + O\Big(x^{2/(2k+1)}\omega(x)\Big)$$

が成り立つ.

D. Banerjee, Y. Fujisawa, T. M. Minamide, Y. Tanigawa [3] は 2023 年に次を示した:

定理 2.5. 実数 $x \geq 3$ と整数 $k \geq 2$ に対して

$$\sum_{n \leq x} \mu_k(n) = A_k x + O_k\Big(x^{1/k}\delta_k(x)\Big), \quad \delta_k(x) \coloneqq \exp\left(-D_k\frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\right)$$

が成り立つ. ここで $D_k > 0$ は k のみに依存する定数である.

これは Bege 予想 (1) の k 依存版の $n = 1$ の場合の肯定的解決である.

3 準備

主結果を示すにあたり必要な補題を用意する.

補題 3.1. 整数 $k \geq 2$ に対して $\mu_k = f_k * c_k$ である. ここで

$$f_k(n) \coloneqq \sum_{d^k\delta = n} (\mu * \mu)(d), \quad n \in \mathbb{N}$$

であり, c_k は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_k(n)}{n^s}=\prod_{p:\text{素数}}\frac{1-2p^{-ks}+p^{-(k+1)s}}{(1-p^{-ks})^2},\quad \operatorname{Re}s>1/(k+1)$$

を満たす数論的関数である.

次の補題の証明は E. Cohen [5] の Lemma 3.4 を見られたい.

補題 3.2. 実数 $x\geq 1$ と整数 $n\geq 1$ に対して

$$\varphi(x,n)\coloneqq\sum_{\substack{r\leq x\\(r,n)=1}}1=\frac{\varphi(n)}{n}x+O(\theta(n))$$

が成り立つ.

補題 3.3. Riemann 予想を仮定するとき, ある絶対定数 $A>0$ が存在して, 実数 $x\geq 1$ と整数 $n\geq 1$ に対して

$$\widetilde{M}_n(x)\coloneqq\sum_{\substack{r\leq x\\(r,n)=1}}\widetilde{\mu}(r)=O\Big(\theta(n)x^{1/2}\widetilde{\omega}(x)\Big),\quad \widetilde{\omega}(x)\coloneqq\exp\bigg(A\frac{\log\xi}{\log\log\xi}\bigg)$$

が成り立つ. ここで $\widetilde{\mu}=\mu*\mu,\xi=x+e^{e^2}$ である.

系 3.4. Riemann 予想を仮定するとき, 実数 $x\geq 1$ と整数 $n\geq 1,k\geq 2$ に対して

$$\sum_{\substack{r\leq x\\(r,n)=1}}\frac{\widetilde{\mu}(r)}{r^k}=\frac{\varphi^2(n)\psi_k^2(n)}{n^4\zeta^2(k)}+O\Big(\theta(n)x^{1/2-k}\widetilde{\omega}(x)\Big)$$

が成り立つ. ここで

$$\psi_k(n)\coloneqq n\prod_{p|n}\bigg(1+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^{k-1}}\bigg),$$
$$\zeta(k)\coloneqq\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^k}$$

である.

補題 3.5. 実数 $x\geq 1$ に対して

$$\sum_{n\leq x}|\widetilde{\mu}(n)|=O(x\widetilde{\omega}(x))$$

が成り立つ.

次の補題は [2, Theorem 3.2] から直ちに従う:

補題 3.6. 実数 $x\geq 1,0<\sigma<1$ に対して

$$\sum_{n\leq x}n^{-\sigma}=O\bigg(\frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma}\bigg)$$

が成り立つ.

補題 3.7. 実数 $x \geq 1$ と整数 $k \geq 2, n \geq 1$ に対して

$$\sum_{\substack{d \leq x \\ (d,n)=1}} \frac{c_k(d)}{d} = \sum_{\substack{d=1 \\ (d,n)=1}}^{\infty} \frac{c_k(d)}{d} + O\Big(kx^{2/(2k+1)-1}\Big)$$

が成り立つ.

補題 3.8. 整数 $k \geq 2$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_k(n)|}{n^{2/(2k+1)}} = O(k)$$

が成り立つ.

補題 3.9. 整数 $k \geq 2, n \geq 1$ に対して

$$\psi_k^2(n) = O\big(n^2\theta(n)\big)$$

が成り立つ.

4 主結果

以上をもとに主結果を述べる.

主定理. k 依存版の Bege 予想は正しい. すなわち以下の 2 つが成立する:

(1) 実数 $x \geq 3$ と整数 $k \geq 2, n \geq 1$ に対して

$$E_{k,n}(x) = O_k\Big(\theta(n)x^{1/k}\delta_k(x)\Big)$$

が成り立つ.

(2) Riemann 予想を仮定する. このとき, 実数 $x \geq 3$ と整数 $k \geq 2, n \geq 1$ に対して

$$E_{k,n}(x) = O_k\Big(\theta(n)x^{2/(2k+1)}\omega(x)\Big)$$

が成り立つ.

Proof. ここでは (2) のみ示す. 以下 Riemann 予想を仮定する.

まず f_k の部分和を評価する. $z = x^{1/k}, x^{-1/k} \leq \rho \leq 1$ として, 部分和を次のように分解する:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{r \leq x \\ (r,n)=1}} f_k(r) &= \sum_{\substack{d^k\delta \leq x \\ (d,n)=(\delta,n)=1}} \widetilde{\mu}(d) \\
&= \left(\sum_{\substack{d^k\delta \leq x \\ d \leq \rho z \\ (d,n)=(\delta,n)=1}} + \sum_{\substack{d^k\delta \leq x \\ \delta \leq \rho^{-k} \\ (d,n)=(\delta,n)=1}} - \sum_{\substack{d \leq \rho z \\ \delta \leq \rho^{-k} \\ (d,n)=(\delta,n)=1}} \right) \widetilde{\mu}(d) \\
&= S_1 + S_2 - S_3.
\end{aligned}$$

そしてこれらを評価する．

補題 3.2, 補題 3.3, 系 3.4, 補題 3.5より

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{\substack{d\le\rho z\\(d,n)=1}} \widetilde{\mu}(d)\varphi\Big(\frac{x}{d^k},n\Big)\\
&= \frac{\varphi(n)}{n}x\sum_{\substack{d\le\rho z\\(d,n)=1}}\frac{\widetilde{\mu}(d)}{d^k} + O\left(\theta(n)\sum_{\substack{d\le\rho z\\(d,n)=1}}|\widetilde{\mu}(d)|\right)\\
&= \frac{\varphi^2(n)\psi_k^2(n)}{n^4\zeta^2(k)}\frac{\varphi(n)}{n}x + O\Big(\theta(n)(\rho z)^{1/2}\widetilde{\omega}(x)\rho^{-k}\Big) + O(\theta(n)\rho z\widetilde{\omega}(x))
\end{aligned}
$$

である．ここで $\widetilde{\omega}$ が単調増加関数であることに注意する．

補題 3.3, 補題 3.6より

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{\substack{\delta\le\rho^{-k}\\(\delta,n)=1}} \widetilde{M}_n\bigg(\Big(\frac{x}{\delta}\Big)^{1/k}\bigg)\\
&= O\left(\theta(n)x^{1/(2k)}\widetilde{\omega}(x)\sum_{\substack{\delta\le\rho^{-k}\\(\delta,n)=1}}\frac{1}{\delta^{1/(2k)}}\right)\\
&= O\Big(\theta(n)(\rho z)^{1/2}\widetilde{\omega}(x)\rho^{-k}\Big)
\end{aligned}
$$

である．

補題 3.3より

$$
\begin{aligned}
S_3 &= \widetilde{M}_n(\rho z)\varphi\big(\rho^{-k},n\big)\\
&= O\Big(\theta(n)(\rho z)^{1/2}\widetilde{\omega}(x)\rho^{-k}\Big)
\end{aligned}
$$

である．以上より

$$
\rho = z^{-1/(2k+1)} = x^{-k/(2k+1)}
$$

とおけば

$$
\sum_{\substack{r\le x\\(r,n)=1}} f_k(r) = \frac{\varphi^2(n)\psi_k^2(n)}{n^4\zeta^2(k)}\frac{\varphi(n)}{n}x + O\Big(\theta(n)x^{2/(2k+1)}\widetilde{\omega}(x)\Big)
$$

を得る．

最後に, 補題 3.1, 補題 3.7, 補題 3.8, 補題 3.9より

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{r\le x\\(r,n)=1}}\mu_k(r) &= \sum_{\substack{d\delta\le x\\(d,n)=(\delta,n)=1}} c_k(d)f_k(\delta)\\
&= \sum_{\substack{d\le x\\(d,n)=1}} c_k(d)\sum_{\substack{\delta\le x/d\\(\delta,n)=1}} f_k(\delta)\\
&= \frac{\varphi^2(n)\psi_k^2(n)}{n^4\zeta^2(k)}\frac{\varphi(n)}{n}x\sum_{\substack{d\le x\\(d,n)=1}}\frac{c_k(d)}{d} + O\left(\theta(n)x^{2/(2k+1)}\widetilde{\omega}(x)\sum_{\substack{d\le x\\(d,n)=1}}\frac{|c_k(d)|}{d^{2/(2k+1)}}\right)\\
&= \frac{\varphi^2(n)\psi_k^2(n)}{n^4\zeta^2(k)}\frac{\varphi(n)}{n}\sum_{\substack{d=1\\(d,n)=1}}^{\infty}\frac{c_k(d)}{d}x + O\Big(k\theta(n)x^{2/(2k+1)}\widetilde{\omega}(x)\Big)
\end{aligned}$$

が成り立つ.

そして

$$A_{k,n} = \frac{\varphi^2(n)\psi_k^2(n)}{n^4\zeta^2(k)}\frac{\varphi(n)}{n}\sum_{\substack{d=1\\(d,n)=1}}^{\infty}\frac{c_k(d)}{d}$$

は容易にわかる.

最後に $x\ge 3$ のとき

$$\widetilde{\omega}(x) = O(\omega(x))$$

だから, 題意を得る. □

参考文献

[1] T. M. Apostol, Möbius functions of order k, Pacific J Math. **32** (1970), 21–27.

[2] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, 1976.

[3] D. Banerjee, Y. Fujisawa, T. M. Minamide and Y. Tanigawa, A note on the partial sum of Apostol's Möbius function, Acta Math. Hungar. **170** (2023), 635–644.

[4] A. Bege, A generalization of Apostol's Möbius functions of order k, Publ Math Debrecen. **58** (2001), 293–301.

[5] E. Cohen, Arithmetical functions associated with the unitary divisors of an integer, Math. Z. **74** (1960), 66–80.

[6] D. Suryanarayana, On a theorem of Apostol concerning Möbius functions of order k, Pacific J Math. **68** (1977), 277–281.